

動的数学ソフトウェア GeoGebra 入門

濱田龍義 (福岡大学/JST CREST)

January 10, 2012

動的幾何学ソフトウェアとは？

「動的幾何学ソフトウェア」 (Dynamic Geometry Software) とは、コンパスと定規の代わりにコンピュータを用いて作図を行うソフトウェアのことである。

「対話式幾何学ソフトウェア」 (Interactive Geometry Software) もしくは「作図ツール」とも呼ばれる。

動的幾何学ソフトウェア

- ▶ Cabri (1985-)
- ▶ Geometer's Sketchpad (1991-)
- ▶ Dr. Geo (1996-)
- ▶ C.a.R. (1996-)
- ▶ Cinderella (1998-)
- ▶ KSEG (1999-2006)
- ▶ GeoGebra (2001-)
- ▶ GeoProof (2006?)
- ▶ KidsCindy (2008?-)
- ▶ Apollonius (2010-)
- ▶ ...

動的数学ソフトウェア

「動的幾何学ソフトウェア」 (Dynamic Geometry Software) は、コンパスと定規をコンピュータソフトウェアで置き換えたものであった。

「動的数学ソフトウェア」 (Dynamic Mathematics Software) は、(初等) 幾何学だけでなく、様々な数学の概念を動的に (Dynamic に) 取り扱うソフトウェアである。

GeoGebra=Geometry+Algebra

- ▶ Prof. Markus Hohenwarter (Johannes Kepler Universität)



- ▶ Java 言語を用いてオープンソースソフトウェアとして開発中。
Keyword J2SDK, Eclipse, Subversion, Javascript, ...
- ▶ 最新版は 4.0.18.0
- ▶ その他に、4.2 系 5.0 系 (3D 版) の β 版が公開。
- ▶ 全世界で数十万人以上の利用者
- ▶ 教育ソフトウェアランキング世界 50 位

講義予定

1. 1 変数関数
2. 1 変数関数の平均変化率, 微分係数, 導関数
3. 平面曲線の媒介変数表示, ベクトル値関数
4. GeoGebra の導入
5. GeoGebra による曲線の描画
6. 様々な平面曲線
7. ベクトル値関数の微分, 平面曲線の接ベクトル
8. 平面曲線の曲率
9. 平面曲線の接触円
10. 与えられた関数を曲率に持つ平面曲線の構築

平均変化率, 微分係数, 導関数

1 変数関数 $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$

$x = a$ における $f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$x = a$ における $f(x)$ の微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数, もしくは微分と呼ぶ.

GeoGebra の導入

1. Web ブラウザ (Mozilla Firefox, IE 等) を起動する.
2. <http://www.knoppix-math.org/wiki/> を開く.
3. 左側メニューにある ocami2012 というページを開く.
4. 「GeoGebra4 WebStart」をクリックする.
5. GeoGebra がダウンロードされて起動されるまで待つ.
6. デスクトップにシンボリックリンクが作成されるので, 以降はデスクトップのアイコンをクリックすることで起動できる.

様々な曲線の媒介変数表示

名称	媒介変数表示	入力
直線	(t, t)	(t, t)
直線	$(at + b, ct + d)$	$(2t+1, t+3)$
放物線	(t, t^2)	(t, t^2)
Cusp	(t^2, t^3)	(t^2, t^3)
葉線	$\left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$	$(3t/(1+t^3), \text{略})$
円	$\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$	$(2t/(1+t^2), \text{略})$
円	$(\cos t, \sin t)$	$(\cos(t), \sin(t))$
楕円	$(a \cos t, b \sin t)$	$(4\cos(t), 2\sin(t))$
双曲線	$(\cosh t, \sinh t)$	$(\cosh(t), \sinh(t))$
擺線	$(t - \sin t, 1 - \cos t)$	$(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$
リサージュ	$(\cos at, \sin bt)$	$(\cos(4t), \sin(7t))$

曲線

曲線 \mathbf{p} の媒介変数表示

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$$

曲線 \mathbf{p} のベクトル値関数による表示

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

GeoGebra による曲線の描画

1. GeoGebra を起動する.
2. スライダーボタンをクリックして, 最小 -2 , 最大 2 , 増分 0.1 となるようにスライダーを作成する.
3. 「入力:」欄に (t, t) を入力して点 A を作成する.
4. スライダー上の点を動かして t を変化させて点 A の動きを確認する.
5. 点 A を右クリックして, 「残像表示」を選びチェックを入れる.
6. スライダー上の点を動かして t を変化させてみる.
7. 点 A の残像表示が確認できたら, 今度はスライダーを右クリックして「アニメーション」を選びチェックを入れる.
8. スライダーを右クリックして「プロパティ」を選択, 「スライダー」→「アニメーション」→「反復」を振動から増加に変更する.

ベクトル値関数の微分

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \end{pmatrix} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\begin{pmatrix} x(t+h) \\ y(t+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{p}(t+h) - \mathbf{p}(t)) \end{aligned}$$

曲率

曲線 $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ の曲率

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

接触円 (曲率円) の半径を r とすると,

$$\kappa(t) = \frac{1}{r}$$

縮閉線 (evolute)

接触円の中心が描く曲線

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \frac{J\mathbf{p}'(t)}{|\mathbf{p}'(t)|}$$

シンプソンの公式

積分の近似値を計算する公式

被積分関数 $f(x)$ を区分的に二次関数で近似することで得られる。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right)$$

ただし, $x_0 = a, x_i = a + \frac{b-a}{n}i, x_n = b$

Theorem 4.12 (Gray-Abbena-Salamon, p109)

$\mathbf{p}(t)$: 平面曲線, $a < t < b$

$\mathcal{C}(t_1, t_2, t_3)$: $\mathbf{p}(t_1), \mathbf{p}(t_2), \mathbf{p}(t_3)$ を通る円

\mathcal{C} : $\mathbf{p}(t_0)$ における接触円

$$\implies \mathcal{C} = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow t_0 \\ t_2 \rightarrow t_0 \\ t_3 \rightarrow t_0}} \mathcal{C}(t_1, t_2, t_3)$$

Theorem 5.14 (Gray-Abbena-Salamon, p137)

$k(x)$: 区分的に連続な函数

$$f(x) = \int k(x)dx + f_0$$

$$g(x) = \cos(f(x))$$

$$h(x) = \sin(f(x))$$

\implies
曲率 $k(s)$ を持つ曲線が得られる。

$$\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \int g(s)ds + g_0 \\ \int h(s)ds + h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \cos(f(s))ds + g_0 \\ \int \sin(f(s))ds + h_0 \end{pmatrix}$$

Gray-Abbena-Salamon Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition, 2006.6.21, Chapman and Hall/CRC, ISBN-13: 978-1584884484

小林昭七 曲線と曲面の微分幾何, 1995.9.1 裳華房, ISBN-13: 978-4785310912

GeoGebra <http://www.geogebra.org/>

GeoGebra 日本

<https://sites.google.com/site/geogebrajp/>

KNXM Wiki <http://www.knopix-math.org/wiki/>

WikiPedia <http://ja.wikipedia.org/wiki/動的幾何学ソフトウェア>

Weisstein, Eric W. "Plane Curves." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/topics/PlaneCurves.html>