不変式論と格子点ソフトウェア LattE

中本和典氏（山梨大学）との共同研究

奥山　真吾

香川高等専門学校
情報工学科

数学ソフトウェアとフリードキュメント X

Outline

登場人物

- N 氏 · · · 数学○段、計算機○級
- O 氏 · · · 数学○段、計算機○級

N 氏の要求

問題

次の行列の個数はいくつか？

$0 \leq r \leq 150$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{15} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{51} & \cdots & a_{55} \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Z})$$

- $a_{ij} \geq 0$
- $\sum_{i,\,j} a_{ij} = r$
- $\sum_{i=1}^{5} a_{ik} = \sum_{i=1}^{5} a_{ki},\ k = 1, \cdots, 5$

$$M(n,r) = \left\{ A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{ij} \geq 0, \\ \sum_{i,j} a_{ij} = r, \\ \sum_i a_{ik} = \sum_i a_{ki} \forall k \end{array} \right\}$$

$$h_n(r) = \#M(n,r),\ F_n(t) = \sum_{r \geq 0} h_n(r) t^r$$

- $M(1,r) = \{(r)\},\ F_1(t) = 1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t}$
- $M(n,0) = *,\ h_n(1) = n,\ F_n(t) = 1 + nt^r + \cdots$

- $n = 2$

$$M(2,1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M(2,2) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \\ & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \right\}$$

$$M(2,3) = \left\{ \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix} \text{(4 個)}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\vdots$$

- $n = 3$

$M(3,1) =$ { 対角行列 (3 個)}

$M(3,2) =$ { 対角行列 (6 個), “互換に対応する物”(3 個)}

$$M(3,3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{対角行列 (10 個)}, \\ \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{array} \right), \ldots, \left(\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 1 \end{array} \right) \text{(9 個)}, \\ \\ \text{長さ 3 の巡回置換 (2 個)} \end{array} \right\}$$

$\vdots$

$M(n,r)$ の部分集合 $D(n,r) = \{$ 成分の和が r の対角行列 $\}$ および $T(n,r) = \langle$ 成分の和が r の "互換に対応する物" $\rangle$ を考えると、

$$\#M(n,r) = \sum_{s+t+u=n}^{n} \#D(n,s)\#T(n,t)g_n(u)$$

と表せる。

Simplified Problem

問題

次の行列の個数はいくつか？

$0 \leq r \leq 150$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{15} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{51} & \cdots & a_{55} \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Z})$$

- $a_{ij} \geq 0$
- $\sum_{i,\,j} a_{ij} = r$
- $\sum_{i=1}^{5} a_{ik} = \sum_{i=1}^{5} a_{ki},\ k = 1, \cdots, 5$
- $a_{ij} \cdot a_{ji} = 0,\ i,j = 1, \ldots, 5$

計算時間（推計）

	$r = 20$	$0 \leq r \leq 150$
Maple	1 min.	80 years
GAP	11 sec.	17 years
C+NTL	0.3 sec.	5 months

「百五十物語」

Reduced Poincaré series

$f_5(t) = \dfrac{g_5(t)}{(1-t)^5(1-t^2)^{10}}$ を用いて計算すると、

定理 (Nakamoto-O.)

$$f_5(t) = \frac{R_5(t)}{(1-t)^5(1-t^2)^9(1-t^3)^4(1-t^4)^2(1-t^5)}$$

ここで、

$$\begin{aligned} R_5(t) = \quad & 1 + t^2 + 16t^3 + 29t^4 + 39t^5 + 95t^6 + 187t^7 + 254t^8 \\ & +307t^9 + 386t^{10} + 461t^{11} + 461t^{12} + 386t^{13} + 307t^{14} \\ & +254t^{15} + 187t^{16} + 95t^{17} + 39t^{18} + 29t^{19} + 16t^{20} \\ & +t^{21} + t^{23} \end{aligned}$$

次の問題

問題

次の行列の個数はいくつか？

$0 \leq r \leq 960$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{61} & \cdots & a_{66} \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{Z})$$

- $a_{ij} \geq 0$
- $\sum_{i,\,j} a_{ij} = r$
- $\sum_{i=1}^{6} a_{ik} = \sum_{i=1}^{6} a_{ki},\ k = 1, \cdots, 6$
- $a_{ij} \cdot a_{ji} = 0,\ i,j = 1, \ldots, 6$

次の問題の計算時間（推計）

	$r = 20$	$r = 70$	$0 \leq r \leq 70$	$0 \leq r \leq 960$
C	1min.	18 days	4 months	1.7×10^{16} years

Impossible!

「九百六十物語」

一年が過ぎて

N：「$r = 70$ の結果を送ります。ところで、LattE というソフトを試してみてください。」
O:「インストールできませんでした。」

C で直接書く以上に早い方法があるんだろうか？

行列の不変式環

- $M_n^m = M_n(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_n(\mathbb{C})$
- $GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright M_n^m$
- $GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}[x_{ij}^{(1)}; x_{ij}^{(2)}; \ldots; x_{ij}^{(m)}]$
- $C(n,m) = \mathbb{C}[x_{ij}^{(1)}; \ldots; x_{ij}^{(m)}]^{GL_n(\mathbb{C})}$

$C(n,m)$ の生成元

予想-Artin(1969)

$C(n,m)$ は $Tr(X_{i_1} \cdots X_{i_r})$ で生成される。

Procesi によって肯定的に解決された。(1976)

$C(n,m)$ の構造

- $C(2,2)$ の構造 (Formanek-Halpin-Li 1981)
- $C(3,2)$ の構造 (Formanek 1987)
- $\mathbb{Z}[M_3 \times M_3]^{PGL_3}$ の構造 (Nakamoto 2002)
- $C(4,2)$ の Poincaré級数 (Teranishi 1987)

$F(s,t)$ を $\mathbb{C}[M_n \times M_n]^{GL_n}$ の Poincaré級数とする。このとき、
$F(t) = ((1-s)^n F(s,t))|_{s=1}$ とおくと、$F(t) = F_n(t)$

Teranishi's Theorem

定理（Teranishi）

1. $F_n(t)$ は関数方程式 $F_n\left(\frac{1}{t}\right) = -t^{n^2} F_n(t)$ を満たす。
2. 整数係数の多項式 $R_n(t)$ が存在して、

$$F_n(t) = \frac{R_n(t)}{(1-t)^n \prod (1-t^{|\sigma|})}$$

が成り立つ。ここで、σ は全ての巡回置換 $\sigma \in S_n$ を動く。
($|\sigma|$ は巡回置換の長さ。)

$F(t) = \frac{R(t)}{(1-t)^n \prod(1-t^{|\sigma|})}$ とおく。

$$N_k = \#\{\text{長さ } k \text{ の巡回置換} \in S_n\}$$

さらに、$L = n + \sum_{k=2}^{n} kN_k$ とおくと、

$$\begin{aligned} F\left(t^{-1}\right) &= \frac{R\left(t^{-1}\right)}{(1-t^{-1})^n \prod\left(1-t^{-|\sigma|}\right)} \\ &= t^L \frac{R\left(t^{-1}\right)}{(t-1)^n \prod(t^{|\sigma|}-1)} \\ &= (-t)^L \frac{R\left(t^{-1}\right)}{(1-t)^n \prod(t^{|\sigma|}-1)} \end{aligned}$$

よって、関数方程式より

$$-t^{n^2} R(t) = (-t)^L R\left(t^{-1}\right)$$

つまり

$$R(t) = (-1)^{L-1} t^{L-n^2} R\left(t^{-1}\right)$$

よって

$$R(t) \text{ の次数は } m = L - n^2$$

であり、$R(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$ とおくと、

$$a_i = (-1)^{L-1} a_{m-i}$$

である。

$N_k = (k-1)!\binom{n}{k}$ より、

$$L = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!}$$

よって、$L_n = n(1 + L_{n-1}),\ L_1 = 1$
$n = 5$ のとき、$L_5 = 325, m = 300$
$n = 6$ のとき、$L_6 = 1956, m = 1920$
$n = 7$ のとき、$L_7 = 13699, m = 13650$
$\vdots$

百五十物語の計算時間

	$r = 20$	$0 \leq r \leq 150$
Maple	1 min.	80 years
GAP	11 sec.	17 years
C+NTL	0.3 sec.	5 months

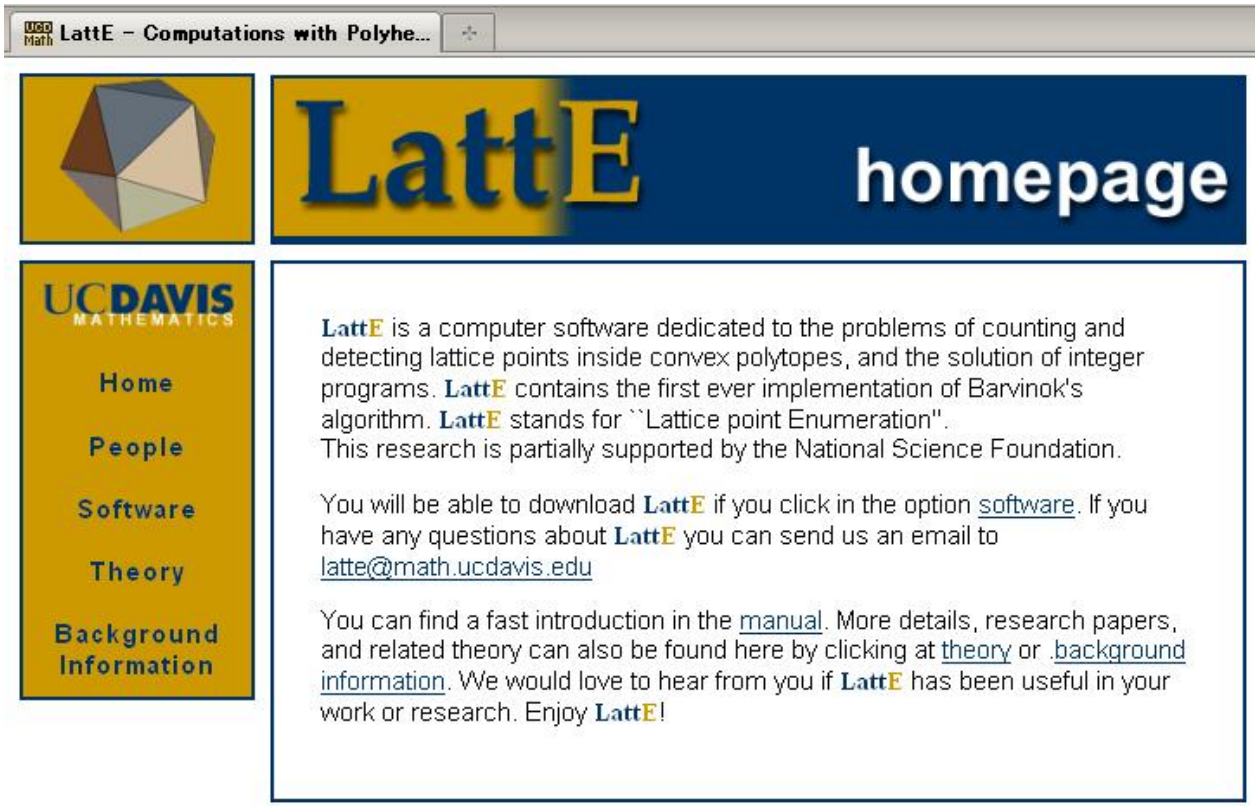
九百六十物語の計算時間

	$r = 20$	$r = 70$	$0 \leq r \leq 70$	$0 \leq r \leq 960$
C	1min.	18 days	4 months	1.7×10^{16} years

Impossible!

N：「LattE というソフトを試してみてください。」

LattE



http://www.math.ucdavis.edu/ latte/
次世代版は “LattE macchiato"

開発者

- LattE
  - J.A. De Loera
  - R. Hemmecke
  - Ruriko Yoshida
  - Jeremy Tauzer...and so on.
- LattE macchiato
  - E.Köppe

LattE にできること

ポリトープ $P \subset \mathbb{R}^d$ に対して

- P の内部にある格子点を数えること。
  - count *filename* $\cdots$ *filename* に P の定義を記述。
  - count *n filename* $\cdots$ nP 内の格子点を数える。
- P の "Ehrhart 級数" を求めること。
  - ehrhart *filename*
  - $Ehr(t) = \sum \#(nP \cap \mathbb{Z}^d)t^n$
- 線型関数の P 内の格子点における最適化。
  - maximize *filename*
  - minimize *filename*

再チャレンジ

- Cygwin · · · ×
- Fedora Core 12 · · · ×
- Fedora Core 6 · · · ◯ !!
- Knoppix Math 2008· · · ◯

連立線型方程式

$$\text{変数の番号} \begin{pmatrix} - & 1 & 2 \\ 3 & - & 4 \\ 5 & 6 & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

LattE input

ポリトープ P が $Ax \leq b$; $A \in M_{m,d}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ で定義されているとき、

$$\begin{array}{|cc|}\hline m & d+1 \\ b & -A \\ \hline \end{array}$$

というファイルを用意してやればよい。

LattE input

```
6 21
0 1 1 1 1 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0
0 -1 0 0 0 1 1 1 1 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0
0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 1 1 1 1 0 0 -1 0 0 0 -1 0
0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 1 1 1 1 0 0 0 -1
0 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 1 1 1 1
-150 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
linearity 6 1 2 3 4 5 6
nonnegative 20 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
```

計算時間 ($n = 5$)

	$r = 20$	$0 \leq r \leq 150$
Maple	1 min.	80 years
GAP	11 sec.	17 years
C+NTL	0.3 sec.	5 months
LattE (CPU:600MHz)	5 min.	13 hours

計算時間 ($n = 6$)

	$r = 20$	$r = 70$	$0 \leq r \leq 960$
C	1min.	18 days	1.7×10^{16} years
LattE (CPU:3GHz)	2.8 hours	2.8 hours	112 days

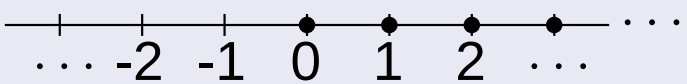
$\mathbb{R}^d \supset P$: rational polyhedron

$$P = \left\{ x =\in \mathbb{R}^d \middle|\ Ax \leq b \right\},\ A\ :\ m \times d \text{ 行列},\ b =\in \mathbb{Z}^m$$

$$f_P = \sum_{a \in P \cap \mathbb{Z}^d} z^a \quad \left(z^a = z_1^{a_1} \dots z_d^{a_d}\right)$$

例 1

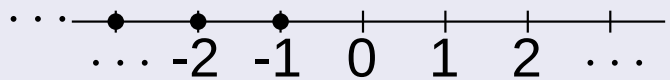
$P \ : \ x \geq 0$



$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z} \ \ (z << +\infty)$$

例 2

$P \ : \ x \leq -1$



$$z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (z >> 1)$$

例 3

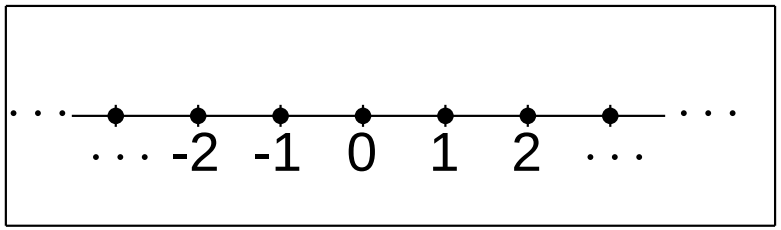
$P : 2 \leq x \leq 4$

$$z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^2}{1-z} + \frac{z^4}{1-z^{-1}}$$

$$(\mathrm{RHS}) = \frac{z^2}{1-z} + \frac{z^5}{z-1}$$

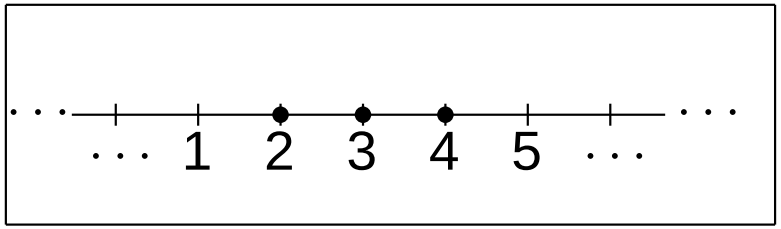
$$= \frac{z^2 - z^5}{1-z} = \frac{z^2(1-z^3)}{1-z}$$

$$= z^2(1+z+z^2)$$



$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-z}$$

$$= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = 0$$



$$z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^2}{1-z} + \frac{z^4}{1-z^{-1}}$$

$$(\mathrm{RHS}) = \frac{z^2}{1-z} + \frac{z^5}{z-1}$$

$$= \frac{z^2 - z^5}{1-z} = \frac{z^2(1-z^3)}{1-z}$$

$$= z^2(1+z+z^2)$$

$$P \ni v \ : \ \text{vertex}$$

$$C(P,v) = v + \{u \in \mathbb{R}^d \mid \text{十分小さな } \forall \delta > 0 \text{ に対して } v + \delta u \in P\}$$

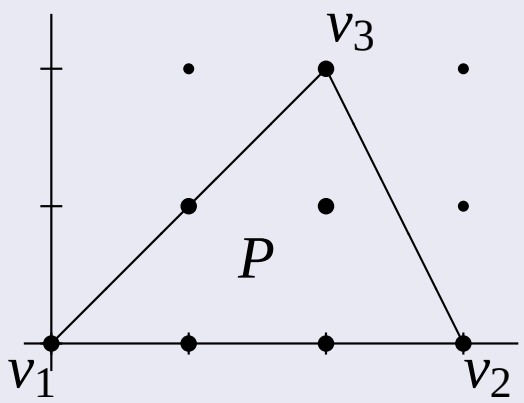
v における P の "supporting cone"

定理

$$f_P = \sum_{v \in V(P)} f_{C(P,v)}$$

$V(P)$: P のすべて頂点の集合

例 4



$$f_{C(v_1)} = \frac{1}{(1-z_1)(1-z_1z_2)}$$
$$f_{C(v_2)} = \frac{z_1^3+z_1^2z_2}{(1-z_1^{-1})(1-z_1^{-1}z_2^2)}$$
$$f_{C(v_3)} = \frac{z_1^2z_2^2+z_1^2z_2+z_1^2}{(1-z_1^{-1}z_2^{-1})(1-z_1z_2^{-2})}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = z_1^2z_2^2 + z_1^3 + z_1^2z_2 + z_1^2 + z_1z_2 + z_1 + 1$$

Proposition

P が直線を含めば $f_P = 0$

Proof.

$$P = \amalg_{\lambda \in \Lambda} l_\lambda$$

$$(\forall \lambda, \nu \in \Lambda,\ l_\lambda \parallel l_\mu)$$

$f_P = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_{l_\lambda}$ なので、$f_{l_\lambda} = 0$ を示せばよい。
$f_{l_\lambda} = z^a \sum_{k \in \mathbb{Z}} z^{kb} = 0$ □

定義 (Algebra of polyhedra)

部分集合 $S \subset \mathbb{R}^d$ に対して $[S] : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を

$$[S](x) = \begin{cases} 1 & (x \in S) \\ 0 & (x \notin S) \end{cases}$$

と定義する。
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}\langle [P] \mid P$ ： polyhedron$\rangle$ ：[P] で張られるベクトル空間
$\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^d)\langle [P] \mid P$ ： 直線を含む polyhedron$\rangle$

supporting cone の有理関数に帰着

定理 (Brion)

任意の polyhedron $P \subset \mathbb{R}^d$ に対して $g \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$[P] = g + \sum_{v \in V(P)} [C(P, v)].$$

系

$$f_P = \sum_{v \in V(P)} f_{C(P,v)}$$

定義 (simple rational cone, unimodular cone)

$u_1, \ldots, u_d \in \mathbb{Z}^d$ ： 一次独立
simple rational cone とは

$$K(u_1, \ldots, u_d) = \left\{ \sum_i c_i u_i \;\middle|\; c_i \geq 0 \right\}$$

のこと。その基本平行体とは、

$$\Pi(u_1, \ldots, u_d) = \left\{ \sum_i c_i u_i \;\middle|\; 0 \leq c_i < 1 \right\}$$

のこと。$\mathrm{vol}(\Pi) = 1$ を満たすとき K を unimodular cone と呼ぶ。

simple rational cone の有理関数

$K = K(u_1, \ldots, u_d)$ が simple rational cone、 Π がその基本平行体のとき、

定理

$$f_K = \Big(\sum_{a \in \Pi \cap \mathbb{Z}^d} x^a \Big) \prod_i \frac{1}{1 - x^{u_i}}$$

$$= \mathrm{vol}(\Pi) \prod_i \frac{1}{1 - x^{u_i}}$$

三角形分割で、一般の cone は simple rational cone に分解できる。

simple rational cone の unimodular cone への分解

定理（Barvinok）

次元 $d > 0$ を fix する。与えられた polyhedral rational cone $K \subset \mathbb{R}^d$ に対して unimodular cones K_i と $\epsilon_i = \pm 1$ であって

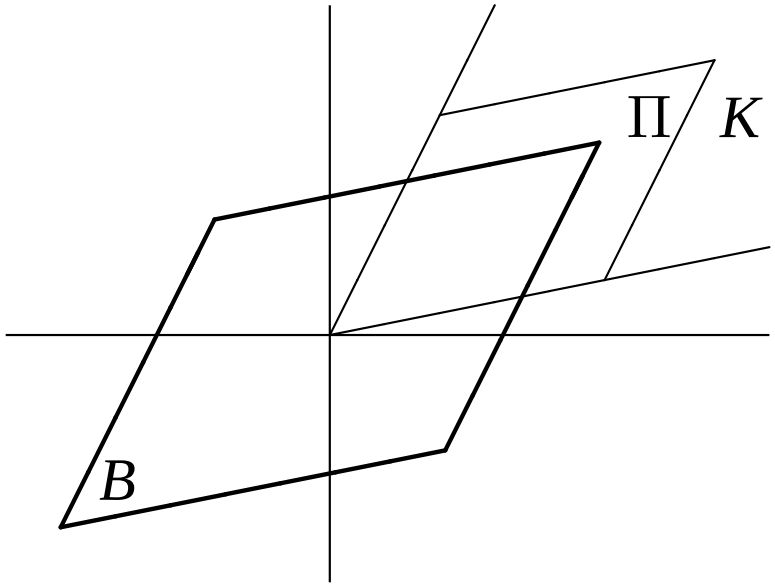
$$[K] = \sum_i \epsilon [K_i]$$

となるものを計算する多項式時間のアルゴリズムが存在する。

三角形分割により、K を simple cone と仮定してよい：

$$K = K(u_1, \ldots, u_d) \subset \mathbb{R}^d$$

$$B = \left\{ \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_d u_d \mid |\alpha_j| \leq (\mathrm{vol}(\Pi))^{-\frac{1}{d}} \right\}$$



とおくと、$\mathrm{vol}(B) = 2^d$ である。

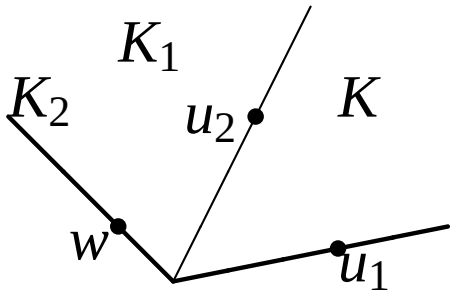
Minkowski's convex body theorem

定理 (Minkowski)

A は $\mathbb{R}^d$ のコンパクトな凸部分集合で、原点に関して対称とする。$\mathrm{vol}(A) \geq 2^d$ ならば、A は原点以外の格子点を少なくとも一つ持つ。

$w \in B$：格子点
$K_j = K(u_1, \ldots, u_{j-1}, w, u_{j+1}, \ldots, u_n)$ とおく。

$$[K] = \sum_j \epsilon_j [K_j] \ (\text{mod lower dim. faces}) \ , \ \epsilon_j = \pm 1$$



$$K_1 = K(w, u_2)$$
$$K_2 = K(u_1, w)$$
$$[K] = -[K_1] + [K_2]$$

$$\mathrm{vol}(\Pi_j) = |u_1 \wedge \cdots \wedge w \wedge \cdots \wedge u_n|$$
$$= |\alpha_j| \mathrm{vol}(\Pi) \leq (\mathrm{vol}(\Pi))^{\frac{d-1}{d}}$$

Summary

- 組合せ論（“ アルゴリズム ”）の威力
  · · · 九百六十物語、完成間近
- 簡約 Poincaré級数の次のステップ
  · · · 数学的な意味 → 不変式論
- Ehrhart 級数
  · · · $n = 7$ の場合